RESUME DE THEORIE DES GRAPHES

TdG – Résumé

I. Graphe $G(X, U, \psi, \nu, \varepsilon)$

1. Définitions

- **Graphe $\boldsymbol{G(X, U, \psi, \nu, \varepsilon)}$:**
  - X, U : ensembles de nœuds et d'arc
  - $\psi : U \to X \times X$ fonction d'incidence
  - ν, ε : fonctions d'étiquetage des nœuds et arc
- **Sous graphe de G :** G moins certains arcs et nœuds associés
- **Graphe partiel de $\boldsymbol{G}$:** G mois certains arcs
- **Sous graphe partiel de $\boldsymbol{G}$:** graphe partiel d'un sous graphe
- **Clique :** Nœuds d'un sous graphe complet de G
- **Graphe complémentaire de $\boldsymbol{G}$:** $\bar{G}(X, \bar{U})$

2. Propriétés

- **Ordre du graphe :** $|G| = \operatorname{card} X$
- **Taille du graphe :** $\|G\| = \operatorname{card} U$
- **Graphe régulier :** $d(x) = cst\ \forall\ x$
- **Graphe complet :** tous nœuds reliés
- **$\boldsymbol{p}$-graphe :** maxi p arcs avec même extrémités
- **Graphe simple :** 1-graphe
- **Graphe multiple :** p-graphe avec $p > 1$
- **Graphe symétrique :** Que des arêtes
- **Graphe antisymétrique :** Aucune arête
- **Graphe transitif :** $\exists(x, y)$ et $(y, z) \Rightarrow \exists(x, z)$

II. Nœuds $(\in X)$

- y successeur de $x \Leftrightarrow x$ prédécesseur de $y \Leftrightarrow \exists(x, y) \in U$
- x adjacent à $y \quad \Leftrightarrow y$ adjacent à $x \quad \Leftrightarrow \exists(x, y)$ ou $(y, x) \in U$

- $\Gamma^+(x)$: successeurs de x
- $\Gamma^-(x)$: prédécesseurs de x
- $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$: adjacents de x

- $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$: demi-degré extérieur de x
- $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$: demi-degré intérieur de x
- $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$: degré de x

- $\Gamma^+(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est un puits
- $\Gamma^-(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est une source
- $\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est un nœud isolé

III. Arc et arêtes ($\in U$)

1. Définitions

- (x, y) : Arc (orienté)
- $[x, y]$: Arête (arc non orienté)
- $[x, x]$: Boucle

2. Propriétés

- u incident extérieurement à $x \Leftrightarrow u = (x, \ldots)$
- u incident intérieurement à $x \Leftrightarrow u = (\ldots, x)$
- U incident extérieurement à $X \Leftrightarrow$ tous les arcs partent de X
- U incident intérieurement à $X \Leftrightarrow$ tous les arcs arrivent dans X

- $\omega^+(x)$: arcs incidents extérieurement
- $\omega^-(x)$: arcs incidents intérieurement
- $\omega^+(A) = \{(x, y) \in U | x \in A,\ y \notin A\}$: cocircuit exterieur
- $\omega^-(A) = \{(x, y) \in U | x \notin A,\ y \in A\}$: cocircuit interieur
- $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$: cocycle

IV. Séquences

1. Définitions

- **Chaine :** Séquence ne tenant pas compte du sens des arcs
- **Cycle :** Chaine qui revient au départ
- **Pseudo-cycle :** Cycle où une arête peut être utilisée plusieurs fois
- **Chemin :** Séquence tenant compte du sens des arcs
- **Circuit :** Chemin qui revient au départ

2. Propriétés

- **Elémentaire :** Ne passe pas 2 fois par le même nœud
- **Simple :** Ne passe pas 2 fois par le même arc
- **Eulérien :** Passe par chaque arc 1 fois exactement
- **Hamiltonien :** Passe par chaque nœud 1 fois exactement
- **Connexité :** x connexe à $y \Leftrightarrow \exists\ \mathrm{Chaine}(x, y)$
- **Forte-connexité :** x connexe à $y \Leftrightarrow \exists\ \mathrm{Chemin}(x, y)$

3. Distances

- **Distance(i,j) :** Longueur du plus court chemin de i à j
- **Diamètre de G :** $\max_{i,j \in X} \mathrm{distance}(i, j)$
- **Excentricité de i :** $\max_{j \in X} \mathrm{distance}(i, j)$
- **Centre de G :** Nœud d'excentricité minimale

V. Propriétés

1. Connexité

- **Graphe (frtmt-)connexe :** Nœuds du graphe 2 à 2 (fortement-)connexes.
- **Composante (frtmt-)connexe :** Nœuds d'un sous-graphe 2 à 2 (fortement-)connexes.
- **Graphe semi-frtmt-connexe :** Graphe dont des composantes frtmt-connexes sont connexes
- **Classe d'équivalence :** Composante frtmt-connexe maximale
- **Graphe réduit :** Graphe limité aux classes d'équivalences
- **Nombre de connexité :** Nombre de classes d'équivalences

2. Arbre

- **Racine r / Anti-racine $\bar{r}$:** $\forall x, \exists \text{ Chemin}(r, x)$ / $\forall x, \exists \text{ Chemin}(x, \bar{r})$
- **Arbre de coût min :** Graphe partiel | somme des arcs minimale

3. Points sensibles

- **Point d'articulation :** Nœud dont la suppr. augmente le nombre de composante connexes
- **Isthme :** Arête dont la suppr. augmente le nombre de composante connexes
- **Coupe :** Ensemble d'arcs séparant le graphe en 2

4. Adjacence

- **Graphe bi-parti :** X peut-être partitionné en 2 stables
- **Stable :** Sous-graphe | Deux nœuds ne sont pas adjacents.
- **Couplage :** Sous-graphe partiel | 2 arêtes ne sont pas adjacentes. (crée des couples)
    - *Max : nombre d'arêtes max / Parfait : tous les nœuds sont saturés*
    - *Nœud saturé si dans le couplage*
- **Recouvrement :** Famille d'arête qui sature tous les nœuds
- **Absorbant A :** $\forall x \notin A, \exists$ successeur dans A
- **Noyau S :** Stable absorbant *(Unique pour graphe sans circuit)*
- **Support T de G :** Tout arête de G a au moins une extrémité dans T
    - *T support de G $\Leftrightarrow$ $(X - T)$ stable de G*
- **Nombre chromatique :** Nombre minimum de stables dont l'union est X

5. Représentation

- **Graphe planaire :** Existence d'une représentation où les arêtes ne se croisent pas
    - *Saturé si ajout d'un arc fait perdre la planarité*
    - *Non planaire si $K_{3,3}$ ou $K_5 \subset G$*
- **Graphe dual G^* :** Nœuds G^* = faces G / Arêtes G^* : adjacence de faces G
    - *G^* planaire, connexe, sans nœud isolé*
- **Graphe de ligne G' :** Nœuds G' = arêtes G / Arêtes : adjacence d'arêtes dans G
- **Graphes isomorphes :** $\exists$ bijection entre graphes
- **Graphe triangulé :** Si tout cycle de lg > 3 admet une corde (relie 2 nœuds non-consécutifs)
- **Graphe d'intervalle :** 1 nœud par ensemble / Arrête si ensemble ont une intersection $\neq \emptyset$
    - *Triangulé, complémentaire = graphe de comparabilité*
    - *Sous-graphe induit par sous-ensemble de nœuds est graphe d'intervalle*
- **Graphe de comparabilité :** Permet d'établir une relation d'ordre
    - *$\Leftrightarrow$ $\forall$ pseudo-cycle de lg impaire, $\exists$ une corde permettant de sauter 1 nœud*
- **Graphe de flot :** 1 source et 1 puits, arcs : capacité $c(u)$, flot $f(u)$
    - *Flot compatible : $f(u) \leq c(u)$ / Flot complet : $f(u) = c(u)$*

VI. Algorithmes

1. Maximisation de flot : Ford-Fulkerson

- Initialiser avec un flot nul
- Chercher une chaine source – puit
- Saturer la chaine (sachant que les arcs parcourus à l'envers reçoivent un flot négatif)
- Répéter en augmentant le flot

2. Calcul du « plus court chemin » : Dijkstra

a. Principe

- Calcul du chemin ayant le poids le plus faible.
- Arcs valués positivement, pas de circuit.
- Pour trouver le chemin, il faut que chaque nœud se souvienne de son prédécesseur privilégié.

b. Algorithme pour un chemin de 1 à k

$S = \{1\}$ % noeuds déjà visités
$\mu(1) = 0$ % potentiel depuis 1
$\mu(j) = \infty \ \forall \ j \notin S$ % potentiel depuis 1 initialement infinis
$i = 1$ % dernier nœud visité

while $k \notin S$
    % calcul des potentiels depuis le dernier nœud ajouté
    for $j \in \Gamma^+(i)$
        $\mu(j) = \min\{\mu(j)\ ;\ \mu(i) + \text{cout}\, i, j\}$
    end

    % selection du noeud entrant i
    $i = \underset{j \notin S}{\operatorname{argmin}}\, \mu(j)$
    $S = S \cup \{i\}$
end